УДК 681.324

П.Е. ПУСТОВОЙТОВ, канд. техн. наук, НТУ «ХПИ» (г. Харьков),

ОЦЕНКА ЭФФЕКТИВНОСТИ СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ПУАССОНОВСКИМ ВХОДЯЩИМ ПОТОКОМ И НЕМАРКОВСКИМ ОБСЛУЖИВАНИЕМ

У роботі запропоновано методику аналізу системи масового обслуговування із пуасоновским вхідним потоком та немарківським обслуговуванням. Показано, що якщо розподіл тривалості обслуговування у цій системі є асіметричним і може бути апроксимованим розподілом Ерланга необхідного порядку, то для аналізу системи може бути побудована марківська модель.

Введение. Анализ литературы.

Для исследования систем массового обслуживания традиционно используются марковские модели, возникающие, если принять допущения о том, что входящий поток заявок на обслуживание – пуассоновский, а закон распределения продолжительности обслуживания является экспоненциальным [1,2]. Есть несколько важных побудительных причин применения этих математических схем. Во-первых, в этом случае аналитические описания процессов функционирования разнообразных по структуре и особенностям построения систем массового обслуживания оказываются чрезвычайно простыми и допускают возможность получения решения в замкнутой форме. Во-вторых, в современной теории случайных процессов пуассоновский поток занимает особое положение, подобное тому, какое в математической статистике занимает нормальный закон распределения случайных величин, поскольку пуассоновский поток является предельным при суперпозиции непуассоновских потоков. Наконец, в-третьих, оценки эффективности систем, получаемые при использовании гипотезы о пуассоновости входящего потока, являются наиболее пессимистическими (дают оценку снизу реальной эффективности анализируемой системы), поскольку пуассоновский поток является «самым случайным» из всех потоков с фиксированной интенсивностью.

Вместе с тем, в весьма близком соседстве с классическими задачами теории массового обслуживания находятся другие задачи, для решения которых требуется привлечение гораздо более серьезного математического аппарата. Необходимость отхода от марковских схем возникает, когда входящий поток – не пуассоновский, либо закон распределения продолжительности обслуживания не является экспоненциальным, либо и то, и другое имеют место одновременно. Следует отметить, что аналитические достижения для немарковских моделей не столь впечатляющи и исчерпывающи, как для марковских. Достаточно полные результаты получены только для одноканальных систем обслуживания путем использования очень эффективного метода вложенных цепей Маркова, предложенного Д. Кендаллом [3]. Их применение для анализа, в частности, систем типа $M/G/1$ основывается на возможности наблюдения за скачкообразным изменением состояния системы в моменты выбытия из нее обслуженных требований. Элементы матрицы переходов при этом интерпретируются как вероятности того, что в интервале, начинающемся в момент начала обслуживания очередного требования и заканчивающемся в момент завершения этой процедуры, в систему поступит некоторое определенное число требований. При использовании этого метода удается построить производящую функцию искомого распределения (p_k), $k=0,1,2,\ldots$, вероятностей состояний системы.

Для многоканальных систем метод вложенных цепей Маркова не применим. Для анализа таких систем с отказами и произвольным законом распределения продолжительности обслуживания все необходимые конечные соотношения совпадают, в силу теоремы Севастьянова Б.А. [4], с соответствующими, полученными для марковских систем. Однако для систем с ожиданием дело обстоит не так благополучно. Здесь наиболее сильные результаты связаны с получением так называемой формулы Полячека-Хинчина [5], определяющей стационарное распределение времени ожидания начала обслуживания.

Таким образом, продолжение исследований немарковских систем сохраняет актуальность. В ситуации, когда возможности прямых методов анализа таких систем, по-видимому, исчерпаны, дальнейшее продвижение может быть получено при использовании их марковских аппроксимаций. Рассмотрим, в частности, возможность получения марковского описания процесса обслуживания.

Постановка задачи.

Возможности аппроксимации произвольных распределений суммой экспоненциальных с полиномиальными множителями обсуждались в [6]. Как отмечают авторы этой идеи, ее реализация наталкивается на ряд трудностей собственно аппроксимации, а также получения простых расчетных соотношений. Другой, рассматриваемый ниже подход состоит в использовании того обстоятельства, что законы распределения продолжительности обслуживания для большинства практических систем обладают важным свойством: они отрицательно асимметричны. Это обстоятельство позволяет использовать для их аппроксимации законы распределения Эрланга надлежащего порядка, которые изначально и конструктивно обладают упомянутым свойством. Возникающая при этом двухпараметрическая оптимизационная задача легко решается. Сформулируем теперь задачу построения марковской модели системы обслуживания, в которой распределение продолжительности обслуживания описывается законом распределения Эрланга.

Цель работы.

Цель работы – построение марковской модели системы с немарковским обслуживанием.

Методика решения задачи.

Для построения модели используем следующий прием. Предположим, что реальное распределение продолжительности обслуживания аппроксимируется законом Эрланга p -го порядка. Как известно, этот закон описывает распределение случайного интервала, возникающего, если просеять простейший поток, выделив из него каждое p-ое событие [7]. Этот факт позволяет немарковский процесс перехода системы из k -го состояния в $(k+1)$ отобразить в виде марковского путем ввода надлежащего числа промежуточных состояний. Пусть, например, в систему поступает поток Эрланга 2-го порядка, интенсивности a. Тогда для марковского описания перехода из состояния E_k в состояние E_{k+1} введем промежуточное состояние $E_{k,1}$. Эту же операцию осуществим для всех других состояний системы. Пусть теперь в эту альтернативную систему поступает пуассоновский поток той же интенсивности a и система находится в состоянии E_k. Тогда очередная заявка потока переведет систему из E_k в $E_{k,1}$, а следующая за ней – из $E_{k,1}$ в E_{k+1} (рис. 1). Таким образом, реальный переход из E_k в E_{k+1} произойдет под воздействием просеянного потока, т.е. потока Эрланга второго порядка.

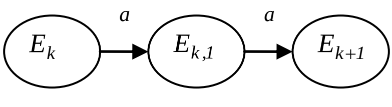

Рисунок 1 – Марковский граф переходов под воздействием потока Эрланга второго порядка

Используем эту идею для описания процесса обслуживания, аппроксимируемого потоком Эрланга второго порядка. Граф состояний и переходов системы приведен на рис. 2. Здесь для простоты описано функционирование системы с отказами, что никак не снижает общности предлагаемой методики.

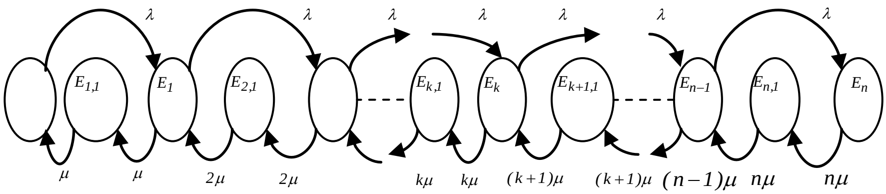

Рисунок 2 – Граф состояний и переходов системы с пуассоновским входящим потоком и эрланговским обслуживанием

На этом рисунке:

E_k - состояние, когда в системе занято ровно k каналов, $k=0,1,2,\ldots,n$;

$E_{k,1}$ - буферное состояние, соответствующее ситуации, когда в системе, по-прежнему, занято ровно k каналов, обслуживание заявки продолжается с той же интенсивностью, $k=0,1,2,\ldots,n-1$;

λ - интенсивность входящего пуассоновского потока;

μ - интенсивность обслуживания.

Приведенному графу состояний и переходов соответствует система линейных алгебраических уравнений относительно искомых вероятностей состояний.

$$
\begin{aligned}
&-\lambda P_0 + \mu P_{1,1} = 0,\\
&\mu P_1 - \mu P_{1,1} = 0,\\
&\lambda P_0 + 2\mu P_{2,1} - (\lambda + \mu) P_1 = 0,\\
&2\mu P_2 - 2\mu P_{2,1} = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\lambda P_{k-1} + (k+1)\mu P_{k+1,1} - (\lambda + k\mu) P_k = 0,\\
&(k+1)\mu P_{k+1} - (k+1)\mu P_{k+1,1} = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\lambda P_{n-2} + n\mu P_{n,1} - \left[\lambda + (n-1)\mu\right] P_{n-1} = 0,\\
&n\mu P_n - n\mu P_{n,1} = 0,\\
&\lambda P_{n-1} - n\mu P_n = 0.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Эта система уравнений, конечно, может быть легко решена, например, по формулам Крамера или любым численным методом. Вместе с тем, специфическая структура этой системы допускает аналитическое решение с использованием следующего искусственного приема.

Просуммируем первое уравнение системы со вторым, третье с четвертым и т.д., третье от конца с предпоследним. Тогда система (1) преобразуется к виду

$$
\begin{aligned}
&\lambda P_0 - \mu P_1 = 0,\\
&\lambda P_0 + 2\mu P_2 - (\lambda + \mu) P_1 = 0,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\lambda P_{k-1} + (k+1)\mu P_{k+1} - (\lambda + k\mu) P_k = 0,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\lambda P_{n-2} + n\mu P_n - [\lambda + (n-1)\mu] P_{n-1} = 0,\\
&\lambda P_{n-1} - n\mu P_n = 0.
\end{aligned} \tag{2}
$$

Введем вспомогательную переменную

$$z_k = \lambda P_{k-1} - k\mu P_k\,,\ k = 1,2,\dots,n\,. \tag{3}$$

Подставляя (3) в (2), получим

$$z_1 = z_2 = \dots = z_n = 0,$$

откуда

$$P_1 = \frac{\lambda}{\mu} P_0;$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$P_k = \frac{\lambda^k}{k!\,\mu^k} P_0;$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$P_n = \frac{\lambda^n}{n!\,\mu^n} P_0.$$

Таким образом, неизвестные $P_1, P_2, \dots, P_n$ выражены через P_0, которое найдем из условия нормировки.

Из всех четных уравнений системы (1) следует

$P_1 = P_{1,1}\,,\ P_2 = P_{2,1}\,,\ \dots,\ P_n = P_{n,1}\,.$

Тогда условие нормировки имеет вид

$$\sum_{k=0}^{n} P_k + \sum_{k=1}^{n} P_{k,1} = P_0 + 2\sum_{k=1}^{n} P_k = P_0\left[1 + 2\sum_{k=1}^{n}\frac{\lambda^k}{k!\,\mu^k}\right] = 1\,.$$

Отсюда

$$P_0 = \frac{1}{1 + 2\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{\lambda^k}{k!\,\mu^k}}\,,$$

$$P_k = \frac{\frac{\lambda^k}{k!\,\mu^k}}{1 + 2\sum_{\ell=1}^{n} \frac{\lambda^\ell}{\ell!\,\mu^\ell}},\ k = 1,2,\ldots,n.$$

Истинная вероятность состояния E_k, соответствующего занятости ровно k каналов, равна

$$P_{k,n} = P_k + P_{k,1} = \frac{2\frac{\lambda^k}{k!\,\mu^k}}{1 + 2\sum_{\ell=1}^{n} \frac{\lambda^\ell}{\ell!\,\mu^\ell}},\ k = 1,2,\ldots,n.$$

$$P_{0,n} = P_0.$$

Таким образом, получены расчетные соотношения для получения распределения вероятностей состояний системы обслуживания, на вход которой поступает пуассоновский поток заявок, а случайное время обслуживания описывается распределением Эрланга второго порядка. Понятно, что использованный в работе прием преобразования немарковской системы с эрланговским обслуживанием в марковскую, применим и для случая, когда аппроксимацией произвольного, но асимметричного, распределения продолжительности обслуживания является распределение Эрланга произвольного порядка. При этом в граф состояний и переходов следует ввести надлежащее число промежуточных состояний.

Выводы. Предложена методика анализа системы массового обслуживания с пуассоновским входящим потоком и немарковским обслуживанием. Показано, что если распределение продолжительности обслуживания в такой системе асимметрично и может быть аппроксимировано распределением Эрланга надлежащего порядка, то для ее анализа может быть построена адекватная марковская модель.

Список литературы: 1. Хинчин А.Я. Работы по математической теории массового обслуживания. -М.: Физматгиз, 1963. -298с. 2. Кофман А., Крюон Р. Массовое обслуживание: Пер. с франц. -М.: Мир, 1965. -348 с. 3. Kendall D.G. Stochastic processes occurring in the theory of queues and their analysis by the method of the imbedded Markov chain. Annals of Math. Statist., 1953. –V.24. –pp.348-354c. 4. Севастьянов Б.А. Формулы Эрланга в телефонии при произвольном распределении длительности разговора. Труды III Всес. математического съезда. -М.: Изд. АН СССР, 1959. -Т.4. -с.68-70. 5. Риордан Дж. Вероятностные системы обслуживания: Пер. с англ. -М.: «Связь», 1966, -184с. 6. Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н. Введение в теорию массового обслуживания. -М.: «Наука», 1969. -492с. 7. Гихман И.И., Скороход А.В., Ядренко М.И. Теория вероятностей и математическая статистика. -К.: Вища школа, 1979. -408с.

Поступила в редколлегию 15.02.2006